

1. Vad är temperatur?
2. Boltzmannfaktorn (med en enkel härledning)
3. Paramagnetism och negativa temperaturer

## Vad är temperatur?

Before the year 1600, science was not aware of temperature as a measurable physical quantity. By the end of the 18th century, instruments had been developed to distinguish between temperature and heat. In this module, the concept of temperature is derived from elementary and general considerations of statistics. Without referring to entropy or to logarithms it is shown that the fractional change in multiplicity with internal energy ( $\beta$ ) must be the same for two systems in thermal equilibrium. This thermodynamic beta is a measure of temperature and can be called coldness.

## Värme - vad är det?

Ordet värme används på olika sätt. I vardagsspråket står det i motsats till kyla. Båda dessa ord kan betyda något som man känner med kroppen och då ligger det nära den mätbara storheten temperatur. Ordböcker ger exempelmeningar som fortsatt sol och värme. Ordet används också för uppvärmning. Ett hus kan ha vatten och värme, man säger värmen är på, man kan låta såsen sjuda på svag värme. I sådana samband ligger begreppet nära den mätbara storheten energi, något som kan tillföras och transportereras, något som förbrukas och som man betalar för.

När ordet används i betydelsen av en mängd värme, har fysiker böjt ordet som ett neutrum. I Norrstedts Svenska Ordbok har det fått ett separat lemma med exempelmeningen det avgivna värmefloden bortgår genom ledning, konvektion eller strålning. När man tillför värme till ett system, är det vanligt att systemets temperatur går upp. Detta är grunden till kalorimetrin, som utvecklades på 1700-talet. Ett system har en viss värmekapacitet, förhållandet mellan mängden tillfört värme och ökningen i temperatur. Som standard valde men ofta vatten:

- en kalori definierades som den mängd värme som ökar temperaturen av en gram vatten med en grad Celsius;
- en Btu (British thermal unit) definierades som den mängd värme som ökar temperaturen av ett skålpund vatten (454 gram) med en grad Fahrenheit.

Därmed har man också enheter för att bestämma specifikt värme (specifik värmekapacitet). Vatten har per definition en specifik värmekapacitet på 1 kalori per gram per grad. Men vattnets specifika värme beror lite på temperatur. Därför lägger man till i definitionen mellan vilka temperaturer temperaturökningen sker.

Det förekommer också att temperaturen inte ökar när värme tillförs. Det sker vid fasövergångar, till exempel när is smälter eller när vatten kokar. Joseph Black introducerade år 1762 termen latent värme för denna värmemängd. Smältvärmet för is är 80 cal/g, kokvärmet är 540 cal/g.

Så kunde man mäta värmemängder och noggrant bestämma termiska egenskaper av många material. Dulong och Petit upptäckte år 1819 att man fick ungefär samma värde om man multiplicerade olika fasta ämnens värmekapacitet med ämnens relativa atomvikt som Dalton hade kommit fram till. En modern formulering av Dulong och Petits lag är att fasta ämnena har samma molära värmekapacitet (vid rumstemperatur).

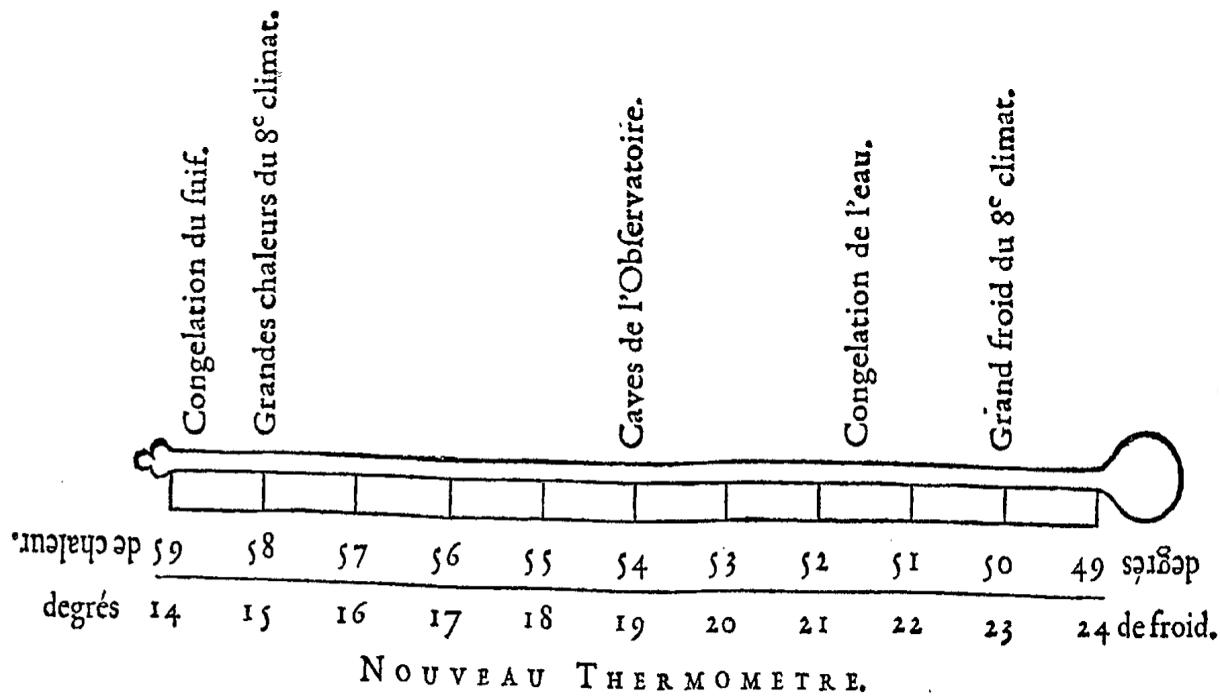
Man visste inte vad värme var, men det hindrade inte dåtidens vetenskapsmän att ge det ett namn: caloric. Det var en av den gamla fysikens imponderable vätskor, fluider som inte vägde något men som kunde bära elektrisk laddning eller värme eller ljus. Caloric flödade från en högre temperatur till en lägre temperatur. Ibland talade man även om frigoric som gav kyla, men det gick bra att förklara alla fenomen i kalorimetri med bara ett av dessa två imponderabilia.

## Energi

Det dröjde några decennier tills man var övertygad att värme var en form av mekanisk energi. Begreppet energi var inte framträdande hos till exempel Newton. Leibniz insåg att total  $mv^2$  var bevarad vid en elastisk stöt men vid den tiden hade man inte skillnaden mellan elastisk och inelastisk stöt klar för sig. Émilie du Châtelet visade att total mekanisk energi (kinetisk + potentiell) är bevarad om det inte finns friktion. Det var genom precisa mätningar av James Prescott Joule på 1840-talet att det blev klarlagt att värme är en form av mekanisk energi. I nutida enheter visade han att 1 kalori är lika med 4,18 joule.

## Temperatur - att den finns

Begreppet temperatur känns ofta svårt att förklara i mer grundläggande termer. Många finner begreppet självtalat. Vi hör det i varje väderleksrapport, vi erfär själva hur varmt det är. Men innan år 1600 var begreppet okänt. Vid den tiden började forskare som Galileo och Drebble observera ändringar i temperatur med termoskop, enkla instrument utan skalfördelning. Från 1600-talet finns några mätserier bevarade, men man skapade inga reproducerbara mätinstrument. Jag får en känsla att man på den tiden inte var medveten om att det fanns en storhet med ett objektivt värde att mäta. Det dröjde till början av 1700-talet.



Amontons termometer från 1701 har två graderingar: en för värme (degrés de chaleur) och en för kyla (degrés de froid). (Fig. 3.2 i [Chang 2004](#))

År 1701 publicerade båda Newton och Rømer en temperaturskala. Fahrenheit tillverkade de första pålitliga kvicksilvertermometrarna. Länge fanns det problem med att definiera reproducerbara fasta punkter för kalibrering. Det fanns också problemet att kalibrerade termometrar med olika ämnen inte överallt på skalan stämde överens med varandra. Man var inte överens om skalan skulle gå ner eller upp: Celsius hade först nollan vid temperaturen för kokande vatten och 100 vid smältande is [[link](#)], kanske var det vår Linné som vände skalan "rätt". Men man var överens om att det fanns något att mäta.

Att det finns en mätbar storhet beskrivs i termodynamikens nollte lag. Den säger att om system A är i termodynamisk jämvikt med system B och om system B är i jämvikt med system C, att då även system A och system C är i termodynamisk jämvikt med varandra. Då flödar inget värme mellan dessa två system om man bringer dem i termisk kontakt med varandra. Så om system B är en termometer och den visar värden i kontakt först med system A och sedan med system C, så säger det något om vad som händer när A är i kontakt med C. Om det var lika flödar ingen energi, om de är olika blir det ett värmeflöde tills de blir lika. Detta är helt oberoende av vad system består av, om det är metall, vatten, glas eller luft. Detta var på inget sätt självklart kring år 1600.

## Temperatur - vad det är

Efter det hade klarlagts vad värme var i dess båda vardagliga betydelser (eller i alla fall hur man kunde mäta dessa storheter), kunde termodynamiken börja utveckla sig. Forskare som Carnot, Clausius och Maxwell gjorde intellektuella stordåd och viktiga upptäckter. Men vi ska inte följa den klassiska mekanikens väg, för den är svår och abstrakt.

Istället ska vi använda statistisk mekanik för att komma fram till de viktigaste resultaten. Och även om det egentligen endast handlar om att räkna (counting), är det i många läroböcker matematiskt ganska komplicerat. Jag ska försöka hålla det så enkelt som möjligt i den här modulen. Och egentligen är det inte så svårt.

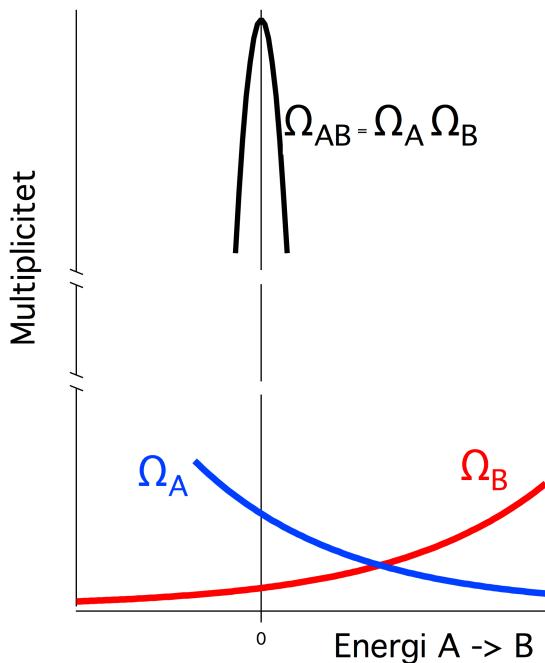
Det är konceptuellt också lite lättare nu med kvantmekanik än med 1800-talets klassiska fysik. Vi är vana att tala om kvantmekaniska tillstånd utan att hålla reda på positioner och hastigheter. Vi har lättare att acceptera en grundläggande slumpmässighet. Vågfunktionens kollaps har nog något att göra med tidens riktning. Men jag ska inte försöka gå in på sådana mer filosofiska frågor.

Först ska vi reda ut vad temperatur egentligen är. Det är inte alla läroböcker som ger ett korrekt svar. Och de böcker som ger ett korrekt svar gör det i termer av entropi, ett ännu mer abstrakt begrepp. Vi ska se här på ett enklare sätt vad det innebär att två system har samma temperatur.

Ett grundläggande begrepp i statistisk mekanik är antalet mikrotillstånd av ett system som är förenligt med systemets makroskopiska parametrar som volym, massa, tryck, temperatur, osv. Vi kan tänka på kvantmekaniska tillstånd, till exempel tillstånd av en partikel i en låda. Redan för bara en enda partikel är det ett stort tal om lådan har makroskopiska mått och om det finns en liten bredd i energi. Om antalet partiklar i lådan är av liknande storleksordning som Avogadros tal ( $10^{23}$ ) blir antalet ofantligt. Antalet kallas multiplicitet och brukar betecknas med den grekiska bokstaven Omega  $\Omega$ . Alla dessa tillgängliga mikrotillstånd antas inträffa med samma sannolikhet. Läs del I av Kjellanders Vad är drivkraften i molekylernas värld? [\[link\]](#) för en pedagogisk framställning som ger konceptuell förståelse.

Betrakta nu två makroskopiska system A och B. Multipliciteten av system A är  $\Omega_A$  och av system B är  $\Omega_B$ . Det finns en länk mellan dem som kan överföra värmearrgy men växelverkan antas vara tillräckligt svag så att den inte påverkar systemens multipliciteter. Multipliciteten av det totala systemet är därför produkt av delsystemernas:  $\Omega_{AB} = \Omega_A \Omega_B$ . Efter tillräckligt lång tid är delsystemen i termodynamisk jämvikt med varandra. De har alltså samma temperatur.

Termisk energi är slumpmässiga rörelser. Om slumpmässiga värmeflöden genom länken inte påverkar temperaturen av system A och system B, betyder det att systemet är mest sannolikt, att det befinner sig i makrotillståndet med maximal multiplicitet  $\Omega_{AB}$ .



Multiplicitet av två system A och B som funktion av energiöverföring från jämviktsläget; även multipliciteten  $\Omega_{AB}$  visas (inte skalnligt).

Man kan göra detta matematiskt, att derivatan av  $\Omega_{AB}$  måste vara lika med noll vid ett maximum. Eller mer informellt genom att se att om  $\Omega_B$  ökar med 1 promille för ett litet energiflöde till B, att  $\Omega_A$  måste minska med en promille för att hålla produkten konstant. Slutsatsen är den relativa ändringen i  $\Omega$  med energi måste vara lika för två system i termodynamisk jämvikt med varandra. Vi inför beteckningen  $\beta$

**Equation:**

$$\beta = \Omega^{-1} \frac{d \Omega}{d E}$$

som måste vara en funktion av endast temperatur. Beteckningen  $\beta$  är vanlig, storheten kallas ofta termodynamisk beta. Ibland kallas  $\beta$  också coldness, "kylighet" ([Garrod 1995](#)). Om man har två system med olika  $\beta$ , tilltar det sammanlagda systemets  $\Omega$  om värmeenergi flödar till delsystemet med större  $\beta$ , större kylighet, tills tillståndet med maximal  $\Omega$  och maximal sannolikhet är uppnått.

Vi ska se från tryckfördelningen i atmosfären att  $\beta = 4 \text{ \%}/\text{meV}$  vid vanliga temperaturer. Detta är ett ganska häpnadsväckande faktum. Det blir samma 4 % ökning i multiplicitet om vi nu tillför 1 meV i energi till en vattendroppe eller till en stor sjö eller till ett järnklot ([Problem 4.3 i Reif 1965](#)). För att bestämma sambandet med kelvinskalan ska vi jämföra det teoretiska beroendet på  $\beta$  med det empiriska beroendet på konventionell temperatur. Enklast är det för paramagnetism där vi ska se att  $\beta$  är proportionell mot  $1/T$ . Proportionalitetsfaktorn ges av Boltzmanns konstant. Dess värde beror på definitionen av vattnets trippeltemperatur som 273,16 kelvin.

En vanlig definition av temperatur i läroböcker är att  $\beta = d(\ln \Omega)/dE$ . Med kedjeregeln för derivatan av naturliga logaritmer ser man att det är samma som formeln ovan. Eller man använder entropi i definitionen, där entropi  $S = k \ln \Omega$ , där  $k$  är Boltzmanns konstant. Detta är också helt korrekt, men sådana definitioner är mindre intuitiva. Även är härledningen svårare att komma ihåg.

**Exercise:**

**Problem:**

Ge det matematiska beviset att den relativa ändringen av multipliciteten med värmeförförseln är lika för två system i jämvikt.

---

**Solution:**

Likställ derivatan av  $\Omega_{AB}$  med noll. Använd att  $\Omega_{AB} = \Omega_A \times \Omega_B$  och använd regeln för derivatan av produkt. Flytta om termerna och akta tecken för värmeförförseln.

**Exercise:**

**Problem:**

I figuren, hur stor är skillnaden i storlek mellan system A och system B?

---

**Solution:**

Multipliciteten av system A är bara ungefär fem gånger så stor som  $\Omega_B$ . Det räcker alltså med att system A består av något som är lika stort som system B plus ett litet system med fem tillstånd.

**Exercise:**

**Problem:** Om skalan i figuren var korrekt, hur skulle  $\Omega_{AB}$  se ut?

---

**Solution:**

Den skulle vara mycket smalare. Lutningen på omse sider om maximum blir ofantligt mycket större om man multiplicerar lutningen i figurens nedre del med ett ofantligt stort tal.

## Boltzmannfaktorn (med en enkel härledning)

The Boltzmann factor is obtained by a constant-T derivation. Empirical data about the variation of barometric pressure with height show that the value of beta ( $\beta=1/kT$ ) is approximately 4 %/meV at ordinary temperatures.

## Boltzmannfaktor - en enkel härledning

Boltzmannfaktorn har ni nog sett. Den spelar en viktig roll, inte bara i fysik utan även i kemi och biologi (Arrhenius ekvation) och elektronik (diodekvationen). Faktorn ser ut så här:

**Equation:**

$$\Pr[E] \simeq e^{-(\beta E)}$$

Här är  $\Pr[E]$  sannolikheten att ett visst mikrotillstånd med energi E förekommer. Det är en negativ exponentiell fördelning där  $\beta$  är en parameter som beror på temperatur. Vi ska se att det är samma  $\beta$  som i föregående modul, den relativa ändringen i multiplicitet med energi. Data om atmosfären kan ge information om hur stor  $\beta$  är och man kan likställa  $\beta = 1/kT$ .



Ett litet system i ett värmebad med konstant temperatur  $\beta$ .

I förra avsnittet betraktade vi två makroskopiska system i termisk kontakt med varandra och fann att  $\beta$  är den relativa ändringen i  $\Omega$  med energi. Nu ska vi betrakta ett litet system som är inbäddat i ett mycket större system. Skillnaden är så stor att en ändring i det lilla systemets energi inte påverkar det stora systemets temperatur. Det stora systemet fungerar som ett värmebad, en energireservoar med konstant temperatur. Eventuellt kan det vara smältande is till exempel, så att temperaturen inte ändras när värmeenergi flödar till eller från värmebadet.

Det lilla systemet kan vara så litet att det inte har en temperatur. Det finns bara ett energispektrum. För enkelhetens skull kan vi anta att varje energinivå i det lilla systemet bara har ett tillstånd.

### **Example:**

Som exempel kan vi ta en harmonisk oscillator med jämt utspridda energitillstånd med intervaller på 1 meV. Anta att värmebadet har  $\beta = 4\%/\text{meV}$ . I oscillators grundtillstånd med energi  $E_0 = 0$  har värmebadet en multiplicitet  $\Omega_0$ . Om oscillatorn är i sitt första exciterade tillstånd med energi  $E_1 = 1 \text{ meV}$  har det absorberat 1 meV från värmebadet. Badets multiplicitet har då minskat med 4 % och blir då  $\Omega_1 = 0,96 \Omega_0$ . Om det överförs ytterligare en energikvant till oscillatorn så att den får energi  $E_2 = 2 \text{ meV}$ , minskar badets energi igen med 4 %. Badets multiplicitet blir då  $0,96^2 \Omega_0$ . Vi kan upprätta en tabell. Man ser en geometrisk serie som kan skrivas som den negativ exponentiella funktionen  $\Omega_i = \Omega_0 \exp[-\beta E_i]$ . Med  $\beta=0,04 \text{ meV}^{-1}$  får man att multipliciteten har reducerats till  $\Omega_0/e$  vid 25 meV och till  $\Omega_0/e^2$  vid 50 meV.

Energi (meV)	Multiplicitet
0	$\Omega_0$

1	$0,96 \Omega_0$
2	$0,96^2 \Omega_0$
3	$0,96^3 \Omega_0$
...	...
25	$0,96^{25} \Omega_0 = 0,36 \Omega_0$
50	$0,96^{50} \Omega_0 = 0,13 \Omega_0$

Multiplicitet av ett värmebad med  $\beta = 4\%/\text{meV}$  för olika energinivåer av ett inbäddat system med  $E_i = i \text{ meV}$ .

Sannolikheten av att hitta det hela systemet i ett tillstånd där det lilla systemet har energi  $E$  är proportionell mot det hela systemets multiplicitet i detta tillstånd och därmed mot värmebadets multiplicitet. Utifrån definitionen av  $\beta$  som den relativna ändringen av  $\Omega$  med energi ser man att man kan skriva:

**Equation:**

$$\frac{d}{d E}(\Omega) = -(\beta\Omega)$$

Minustecknet är en konsekvens av att energin som tillförs det lilla systemet tas ifrån värmebadet. Minskningen av multipliciteten med energi är proportionell mot multipliciteten. Det är en differentialekvation av samma form som den för radioaktivt sönderfall eller som den för urladdning av en kapacitans. Lösningen är standard:

**Equation:**

$$\Omega = \Omega_0 e^{-(\beta E)}$$

där  $\Omega_0$  är en integrationskonstant. Eftersom sannolikheten är proportionell mot multipliciteten har vi härmed härlett Boltzmannfaktorn. Vi har gjort det utan att använda entropi eller Taylorutveckling. Vi har inte heller använt Lagrange-multiplikatorer. Det finns dock en subtil approximation i denna härledning: antagandet att det lilla systemet är urskiljbart. Därför leder det till den klassiska Boltzmannfördelningen och inte till en Bose- eller Fermi-Dirac-fördelning. Vårt sätt kallas konstant-T-härledningen ([Prentis 1999](#)). Det finns andra enkla härledningar av att fördelningen måste vara en negativ exponentiell funktion av energi ([Müller 2014 och referenser där](#)), men den här härledningen har fördelen att den visar omedelbart att prefaktorn är samma  $\beta$  som i villkoret för termodynamisk jämvikt mellan makroskopiska system.

## Barometriska höjdformeln, bestämning av $\beta$

Vi kan använda Boltzmannfaktorn för att beskriva sannolikhetsfördelningen för att en kvävemolekyl befinner sig på en viss höjd ovanför jordytan. Detta ger atmosfären densitet. Genom att jämföra med den barometriska höjdformeln kan man se hur stor  $\beta$  är vid vanliga temperaturer.

Det är allmänt känt att lufttrycket är lägre på hög höjd. Luften är glesare där. Den barometriska höjdformeln ger att trycket avtar exponentiellt, där man med en skalhöjd  $h_0$  anger hur starkt beroendet av tryck  $p$  på höjd  $h$  är:  
**Equation:**

$$p = p_0 e^{-\frac{h}{h_0}}$$

Vi ser samma matematiska form som i Boltzmannfaktorn. I första approximation bortser vi från temperatursvariationer och tar att tryck och densitet är proportionella mot varandra. Energin av en molekyl med massa  $m$  i jordens gravitationsfält är  $mgh$  där  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Jämförelse av uttrycken visar att  $\beta = 1/(mgh_0)$ . Nära jordytan är skalhöjden ungefär 8 km. Med massan lika med 28 amu för  $\text{N}_2$  får man att  $\beta = 2,74 \cdot 10^{20}$  per joule eller 44 per eV eller 4 % per meV.

Parametern  $\beta$  är endast en funktion av temperatur men vi har inte visat än vad funktionen är. Sambandet med kelvinskalan är  $\beta = 1/(kT)$  där  $k$  är Boltzmanns konstant som ges av att trippelpunkten av is ligger vid  $T = 273,16$  K per definition. Det stämmer också med observationen att atmosfären skalhöjd är mindre där temperaturen är lägre och  $\beta$  är större. Man kan härleda sambandet mellan  $\beta$  och gastemperatursskalan (och därmed med kelvinskalan) genom härledning av gaslagarna. Eller så kan man bestämma magnetisk susceptibilitet som funktion av  $\beta$  och jämföra med Curies lag.

## Paramagnetism och negativa temperaturer

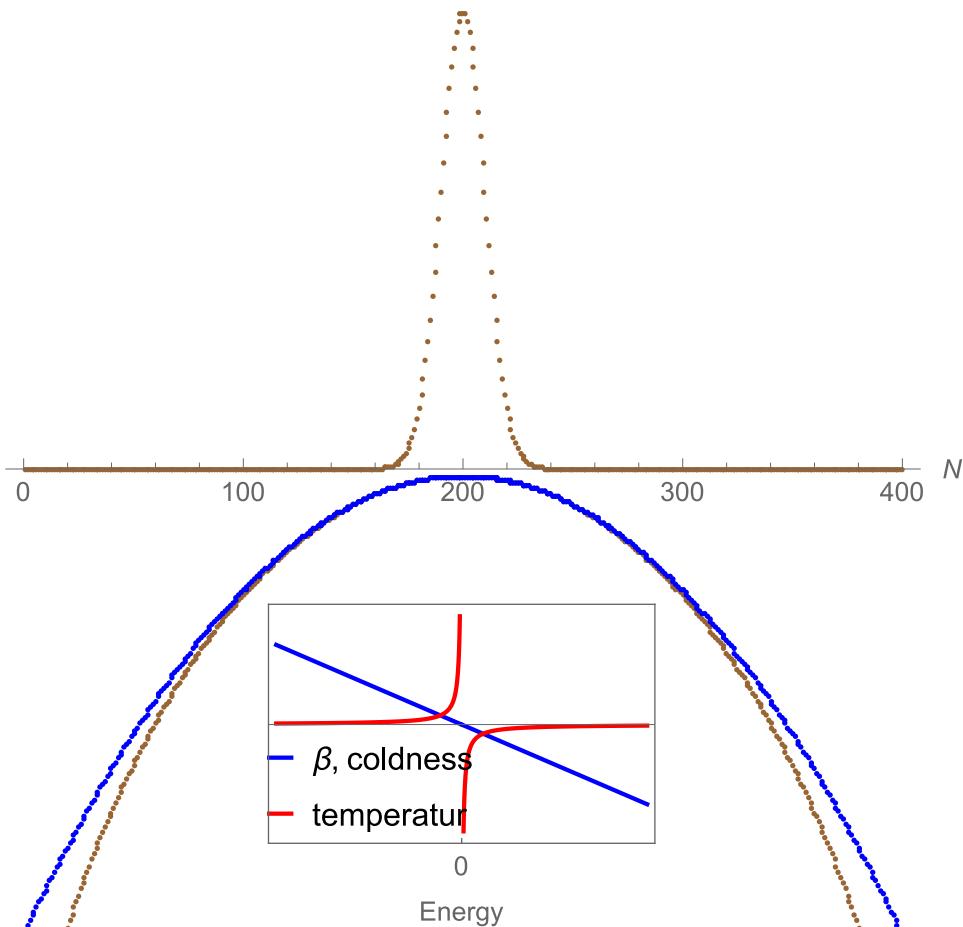
We use the two-level system of a spin 1/2 particle in a magnetic field to connect the thermodynamic  $\beta$  (coldness) with the kelvin scale. Also negative temperatures are discussed.

De enklaste systemen är system med bara två tillstånd för varje delsystem ([Moore 1997](#)). Ett exempel är partiklar med spinn 1/2 i ett magnetfält: kvantmekaniskt har varje spinn endast två möjligheter: upp eller ner. Energiskillnaden mellan dessa tillstånd är  $2\mu B$ , där  $\mu$  är dipolmomentet och  $B$  är magnetfältet.

Systemet har lägst energi när varje spinn har lägst energi. Det är grundtillståndet, där magnetiseringen är mättad. Det finns bara ett sådant tillstånd,  $\Omega = 1$ . För högre energier kan det finnas fler tillstånd. Betrakta till exempel ett system med fyra spinns. Då finns det fyra mikrotillstånd med näst-högre energi:  $\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow$ ,  $\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow$ ,  $\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow$  och  $\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow$ ,  $\Omega = 4$ . Antalet ges av binomialkoefficienterna, samma tal som man får när man skriver ut  $(a+b)^N$  i sina termer. För tillståndet med magnetisering noll finns flest mikrotillstånd:  $\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow$ ,  $\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow$ ,  $\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow$ ,  $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$ ,  $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$  och  $\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow$ ,  $\Omega = 6$ .

## Curies lag

Antalet mikrotillstånd  $\Omega$  följer binomialfördelningen. Den är symmetrisk. För ännu högre energier än magnetisering noll går antalet tillstånd ner igen. För högst möjliga energi finns bara ett tillstånd, när alla sajter har omvänt spinn,  $\Omega = 1$ . Det innebär alltså att ändringen av  $\Omega$  med energi är negativ. Därmed skulle även  $\beta$  vara negativ. Nu hade vi bara definierad  $\beta$  för värmebad, så vi ska betrakta ett stort spinnssystem. Då övergår den diskreta binomialfördelningen i normalfördelningen, Gausskurvan. Den är kontinuerlig och därmed kan man ta derivatan.



Ett magnetiskt system av 400 spinns med två nivåer. Övre grafen visar binomialfördelningen. Det största antalet mikrottillstånd inträffar vid  $N=200$ , där magnetiseringen är noll. Därunder plottas fördelningen på logaritmisk skala (brun) i jämförelse med Gausskurvan (blå). Inset visar  $\beta$  coldness och temperatur, som båda blir negativa när den magnetiseringen är motsatt fältet.

Det är derivatan med hänsyn till energi som är av intresse. Energi är proportionell mot magnetiseringen och magnetiseringen ges av skillnaden mellan antalen spinn-upp och spinn-ner. Vi betraktar området där magnetiseringen är liten, nära normalfördelningens maximum. Om man använder att  $\beta$  är lika med derivatan av logaritmen av  $\Omega$ , blir matematiken

mycket enkel. Logaritmen av Gausskurvan är parabolisk, se figur. Dess derivata är en rät linje. I området där normalfördelningen är en bra approximation finns alltså ett linjärt samband mellan  $\beta$  och magnetisering. Magnetiseringen tilltar proportionellt mot kyligheten  $\beta$ .

Härmed kan vi se vad denna termodynamiska  $\beta$  är i mer konventionella termer. Experimentellt är sambandet mellan magnetiseringen och temperatur känt som Curies lag för paramagnetism. Den säger att den magnetiska susceptibiliteten är proportionell mot  $1/T$ , där  $T$  är absolut temperatur. Så vi kan likställa  $\beta = 1/(kT)$  där konstantens värde ges av att vattnets trippelpunkt definierad som 273,16 kelvin.

## Negativ temperatur

Vi ser att magnetiseringen och  $\beta$  minskar när temperaturen blir högre. När temperaturen går mot oändligt hög, går båda magnetiseringen och  $\beta$  mot noll. Det innebär att systemet överför spontant värmeenergi till vilket annat vanligt system som helst. Det minskar inte spinnsystemets multiplicitet, ökar det andra systemets, så att total  $\Omega$  ökar.

Det finns också ett område till höger om nollgenomgången, där  $\beta$  blir negativ. En negativ  $\beta$  är inget problem, den är fortfarande proportionell mot magnetiseringen. Storheten beter sig också som kylighet: om det blir kontakt med ett annat system, flödar energin spontant till systemet med större kylighet.

Problemet är bara att temperatur som  $1/\beta$  blir negativ ([Garrod 1995](#)). Matematiskt är det orimligt att ha negativa temperaturer bortom oändligt höga temperaturer ([Moore 1997](#)). Men sådant händer bara i system där energin har ett maximum. Sådana system är sällsynta, oftast är det magnetiska system. På något sätt finns det alltid en koppling till konventionella system, som alltid har en positiv  $\beta$  och positiv temperatur. Det betyder att system med negativ temperatur inte kan vara i jämvikt med vanliga system. Vanligtvis tar det inte lång tid för ett spinnsystem att komma i jämvikt med rörelseenergi. Därmed försätter magnetiseringen och spinnsystemet får en positiv temperatur.

Hur kan man då åstadkomma spinnsystem med negativ temperatur? Enkelt: i ett starkt magnetfält kyler man ner materialet som spinnsystemet är en del av och som det är i termisk kontakt med. Så får även spinnsystemet en låg temperatur och en magnetisering. Vid tillräckligt låg temperatur kan man komma nära spinnsystemets mättnadsmagnetisering. Sedan vänder man på magnetfältet. Då har även spinnsystemets  $\beta$  och dess temperatur bytt tecken och blivit negativ. Energi börjar flöda från spinnsystemet till materialet som det är en del av. (Man kan också använda en liknande metod för att kyla materialet: adiabatisk demagnetisering.)

## Övningar

### Exercise:

**Problem:** Bestäm  $\beta$  av en gaussfördelning utan att använda logaritmer.

---

### Solution:

Insert Solution Text Here

### Exercise:

### Problem:

Vad händer med fördelningens bredd när antalet spinns blir större? Hur bred är den när antalet spinns är  $10^{23}$ ?

---

### Solution:

Insert Solution Text Here

### Exercise:

### Problem:

Curies lag ger susceptibiliteten, innebär alltså att magnetiseringen är proportionell mot magnetfältet. Visa att det för höga temperaturer stämmer med vår modell.

---

**Solution:**

Insert Solution Text Here